



# 基于MQ径向基函数的迭代自适应间断检测算法



2015年中国海洋大学第三届应用数学与科学计算高级研讨班

乔远阳, 新疆大学, 数学与系统科学学院

## 引言

近年来, 径向基函数 (RBF) 方法已经在偏微分方程数值解、图像处理、机器学习、神经网络等领域, 得到了广泛的应用。RBF 方法可以在任意网格上适用。应用 RBF 方法可以准确的识别间断或大梯度位置, 因此可以作为一个间断检测的算法。

迭代自适应 RBF 方法表明, 通过膨胀系数  $\lambda$  的增大或减小, 可同时检测多个间断点。若形状参数  $\epsilon$  固定, 间断位置的  $|\lambda|$  会达到局部最大, 故可作为判断间断的标准。

我们主要研究了 (Multiquadric)MQ RBF 的迭代自适应间断检测方法在一维和二维问题上的应用。对于二维问题, 我们采用维数分裂的方法进行处理, 这样简单易实现且高效。

## MQ RBF 逼近方法

设  $X = \{x_i | x_i \in [-1, 1], i = 1, \dots, N\}$  是网格点的集合,  $f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))$ , 其中  $f(x_i)$  是网格点的函数值。在这里我们使用 MQ RBF, 其定义如下:

$$\phi_j(x) = \sqrt{(x - x_j)^2 + \epsilon_j^2}, x \in [-1, 1], x_j \in X \quad (1)$$

这里  $\epsilon_j$  是预先给定的。令:  $x_i = -1 + (i - 1)\Delta x$ , 其中  $\Delta x = \frac{2}{N-1}$ 。

MQ RBF 逼近函数  $f(x)$  得到

$$S_{f,x}(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + \epsilon_j^2} \quad (2)$$

由条件  $S_{f,x}(x_i) = f(x_i)$  可得

$$\lambda = M^{-1}f, \quad (3)$$

其中,  $M_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + \epsilon_j^2}$ 。

$S_{f,x}(x)$  的一阶逼近导数可以表示为:

$$S'_{f,x}(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j (x - x_j) / \sqrt{(x - x_j)^2 + \epsilon_j^2} \quad (4)$$

现定义集合  $C$ ,

$$C = \{C_i | C_i = C_i / \max(C_i), i = 1, \dots, N\} \quad (5)$$

其中  $C_i = |\lambda_i S'_{f,x}(x_i)|$ , 即为检测间断的标准。

通过  $C$  找到间断点后放入集合  $S$  中, 即:

$$S = \{S_i | S_i = x_i, C \geq \eta > 0, x_i \in X, i = 1, \dots, N\} \quad (6)$$

这里  $0 < \eta < 1$  是提前给定的。

## 1D 迭代自适应 RBF 方法

给定  $\epsilon = 0.1, 0 < \eta < 1, \delta > 0$

第一步: 对给定  $\epsilon$  和  $f$ , 由 (3) 和 (5) 分别得到  $\lambda$  和  $C$

第二步: 找间断点集合  $S = \{x_i | x_i \in X, C(x_i) \geq \eta, i = 1, \dots, N\}$

第三步: 更新  $\epsilon$ , 重新计算  $C$

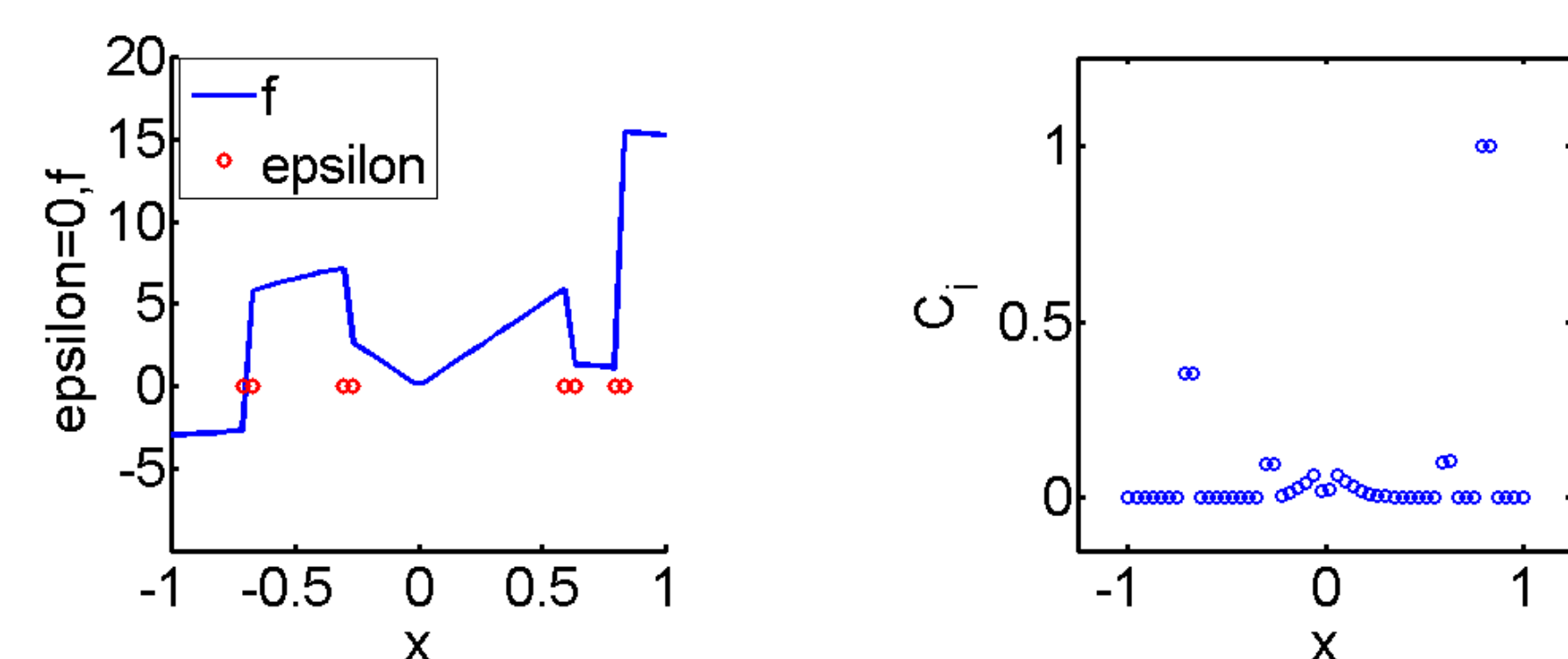
$$\epsilon_i = \begin{cases} 0, & x_i \in S, \\ 0.1, & x_i \notin S. \end{cases}$$

第四步: 当  $|C^{new} - C^{old}| > \delta$  时, 重复上述步骤, 可检测到所有间断点。

注: 随着  $N$  的增大, MQ RBF 方法的迭代矩阵  $M$  会随之变大, 产生一个病态问题。为此, 我们通过延拓域来解决。

例如: 初始域  $\Omega = [-x, x]$ , 网格点数为  $N$ , 当  $N < 200$  时,  $x = 1$ ; 当  $N \geq 200$  时, 初始域要延拓后才能解决问题。延拓域与网格点数  $N$  关系式为:  $x^{min} \approx \frac{6}{1000}N - 0.2$

## 1D 数值检测数据



上图中  $\eta = 0.5, N = 50$ 。

## 2D 迭代自适应 RBF 方法

二维 MQ RBF 为:

$$\phi_{i,j}(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + \epsilon_{ij}^2} \quad (7)$$

其中,  $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ 。

二维 MQ RBF 逼近函数可表示为:

$$S_{f,z}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \lambda_{ij} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + \epsilon_{ij}^2} \quad (8)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N_x, j = 1, 2, \dots, N_y, N_x$  和  $N_y$  分别是  $x$  和  $y$  方向的中心点总数。

为解决二维问题, 有两种方法: 维数分裂法和全局扩展法。这里采用维数分裂法, 将二维问题转化为两个方向的一维问题进行解决。

对给定二维函数  $f(x, y)$ :

(1) 分别固定  $x$  方向  $y$  方向按照一维 MQ RBF 方法进行计算;

(2) 把上步两个方向检测得到的数据都放入到与  $f$  一样大小的二维函数中;

这样就可以检测到所有的间断点。

## 2D 数值检测数据

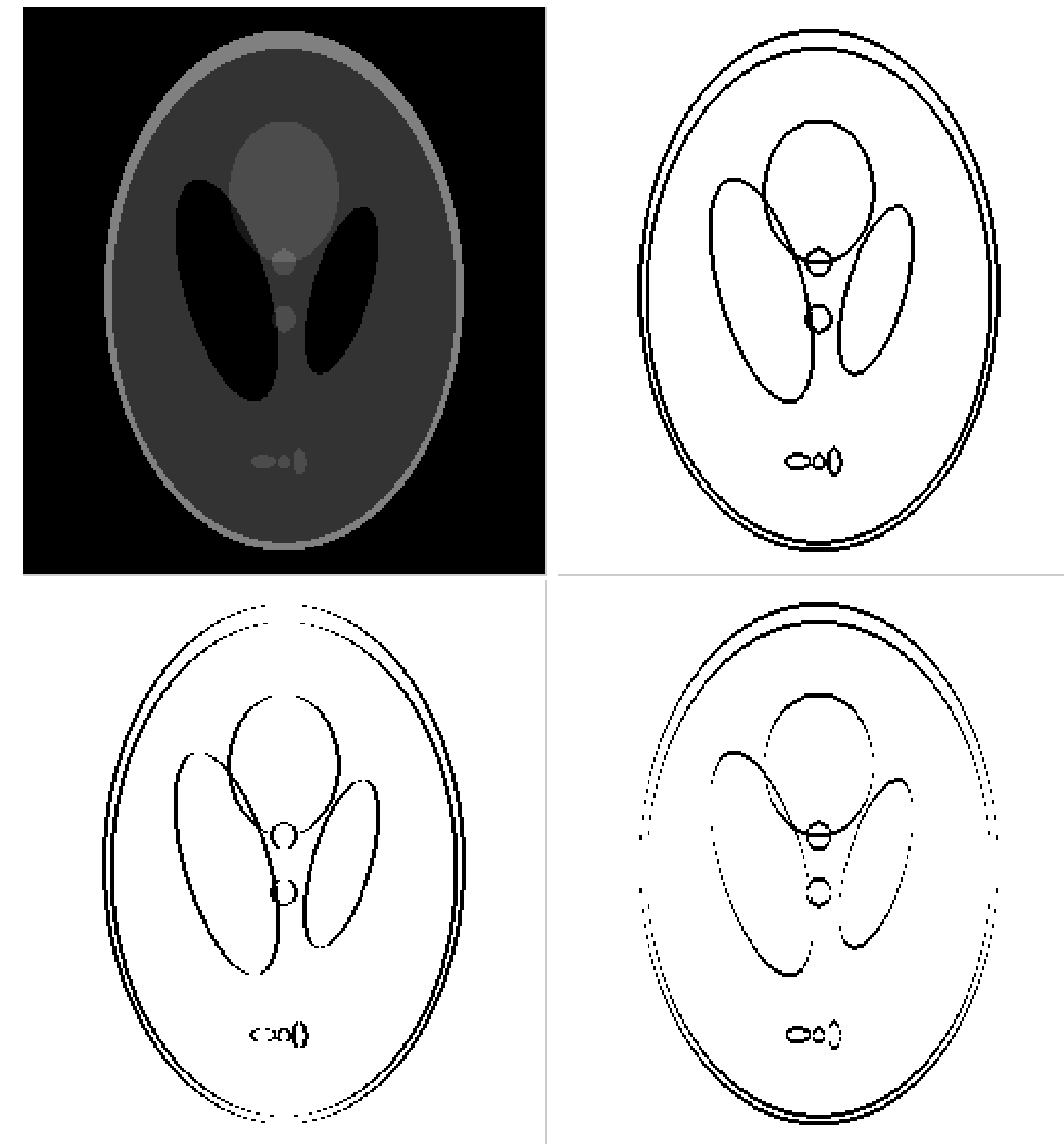


Fig.1 Shepp Logan(256 × 256)

Fig.1 是 Shepp Logan 的图像和边缘检测图,  $\eta = 0.4, CPU\ time = 6.778s$ , 其中, 下图分别是  $x$  方向和  $y$  方向得到的检测结果。Fig.2 和 Fig.3 分别是  $\eta = 0.1$  和  $\eta = 0.01$  时的图像和边缘检测图, 且  $CPU\ time$  分别为 19.465s 和 58.939s。由此可以看出 MQ RBF 方法可以得到较好的检测结果, 但因计算量大而耗时。

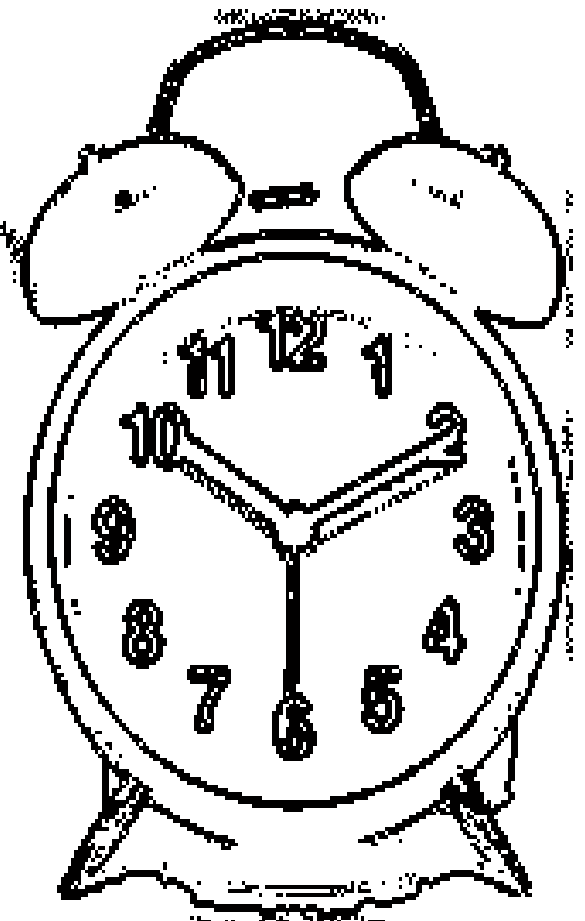


Fig.2 Alarm Clock(300 × 300)



Fig.3 Future yang(540 × 960)

## 基金

- School of Mathematical Sciences, OUC.
- Startup grant by Ocean University of China (201412003).
- Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2012AQ003).
- National Natural Science Foundation of China (11201441).

## 致谢

在此, 我要对帮助过我的所有人表示感谢。首先, 非常感谢贵校能够提供给我这样一个学习和交流的机会。其次, 我非常感激方奇志院长, 曾维新教授, 高振教授在学术上和生活上给予的支持; 同时, 我衷心的感谢李鹏学长、吴技莲师姐和王保山同学在编程上对我耐心的指导和帮助, 这使我受益匪浅, 也要感谢温晓、朱强强、孙冰溶、张经纬等朋友在生活和学习方面对我的帮助和关心。最后, 我要感谢我的伙伴们在这短短的两个月里带给我的快乐和成长。

## 参考文献

- [1] J.-H. Jung, V. Durante, An iteratively adaptive multiquadric radial basis function method for the detection of local jump discontinuities, Appl.Numer.Math. 59 (2009) 1449 - 1466.
- [2] J.-H. Jung, A note on the Gibbs phenomenon with multiquadric radial basis functions, Appl. Numer. Math. 57 (2007) 213 - 229.
- [3] J.-H. Jung, S. Gottlieb, S.O. Kim, Iterative adaptive RBF methods for detection of edges in two-dimensional functions, Appl.Numer.Math. 61 (2011) 77 - 91

## 未来工作

利用 MQ RBF 检测间断问题是目前研究的一个方向, 形状参数的选取对问题的解具有很大的影响, 怎么选取形状参数使我们得较好的检测结果; 将 RBF 方法用于求解偏微分方程数值解和更高维的间断检测上。